Compte rendu du colloque de mathématiques

tenu à Clermont-Ferrand du 4 au 8 juin 1962 [1].

par René de POSSEL

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

PARMI les manifestations organisées à Clermont-Ferrand à l'occasion du Tricentenaire de la mort de Blaise Pascal, il en est deux dont je dois vous parler aujourd'hui. Elles ont eu pour objet de mettre en lumière l'état de développement le plus récent du courant de pensée scientifique qui a pris naissance voici plus de trois siècles avec Pascal. Il s'agit d'une part du « Colloque de mathématiques », et d'autre part de l' « Exposition de machines à calculer ». Je ne parlerai pas du « Colloque de physique sur l'émission de lumière cohérente » auquel je n'ai pas assisté; je me bornerai à dire qu'il s'agit là de l'un des bonds en avant les plus spectaculaires qu'aient jamais réalisés les physiciens.

Qu'est-ce qui distinguait ce « Colloque de mathématiques » des autres réunions de mathématiciens, qui ont lieu plusieurs fois par an dans le monde? C'est surtout le choix des sujets. En effet, le Colloque était divisé en cinq sections, dont les titres, à première vue, peuvent surprendre :

logique mathématique,
calcul des probabilités,
géométrie et physique mathématique,
analyse numérique,
machines à calculer.

1. Exposé fait à l'Institut de France le 13 juin 1962.

Ces titres, qui englobent des domaines divers des mathématiques, semblent avoir été choisis pour deux raisons différentes : d'abord parce qu'ils correspondent à différentes parties de l'œuvre entamée par Blaise Pascal, constituant des domaines dont il avait posé les bases, mais surtout parce que presque tous les spécialistes de l'un de ces domaines s'intéressent nécessairement aux autres. Cependant, un lien d'une autre nature apparaît entre eux : ils touchent tous plus ou moins au traitement de l'information par les machines.

L'expression « traiter l'information », due, je crois, à Pierre Auger, demande quelque explication. Il s'est, en effet, développé une « théorie de l'information » qui intervient essentiellement dans le domaine des télécommunications. Ce n'est pas uniquement de cette information-là qu'il s'agit, bien que l'information qui est « traitée » circule le long des fils dans les machines. Cette « information traitée » est prise dans un sens très général : une machine reçoit des données un « programme » de travail, et fournit des résultats; les données, le programme constituent de l'information, les résultats également, mais la machine a « traité » les uns pour obtenir les autres.

Pour chacune des quatre premières sections, des spécialistes mondiaux, choisis parmi ceux dont la pensée est la plus originale, avaient été pressentis; la plupart d'entre eux avaient répondu à l'appel. Les exposés étaient en nombre assez restreint, afin de laisser place aux discussions. Sept à huit exposés par section, répartis pour chacune sur trois ou quatre demi-journées, constituaient un rythme assez lent pour pouvoir suivre aisément les débats de toute une section.

Par contre, le fonctionnement simultané de plusieurs sections a obligé certains participants à limiter leur activité à un domaine unique.

En dehors des conférenciers du Colloque, au nombre de trente-quatre, on pouvait compter plus d'une centaine de participants.

M^me^ Tonnelat, professeur à la Faculté des Sciences de Paris et spécialiste des théories physiques qui sont issues de la « relativité générale », fit un premier exposé hors section, intitulé « Pascal et la recherche scientifique de tous les temps ». Le thème général en était : « La Science est comme un grand livre qui est écrit dans une langue spéciale, assez difficile à comprendre. Si Pascal s'est arrêté de bonne heure dans sa lecture, d'autres l'ont continuée, et le retard n'a pas été grand sur ce qui aurait eu lieu s'il avait pu aller un peu plus loin dans cette lecture. »

Examinons maintenant les sections du Colloque.

Tout d'abord la *logique mathématique*. A quoi peut-elle bien servir? C'est une question qu'ont posée pendant longtemps un grand nombre de mathématiciens, et en particulier Henri Poincaré. Aujourd'hui, tous l'ont reconnue indispensable, et bien d'autres disciplines l'utilisent. Elle a tout d'abord été employée dans l'étude des circuits électriques à commutations multiples, où son efficacité a été immédiate. Elle est intimement liée aux machines à calculer, ou, plus généralement, aux machines à traiter l'information, d'abord dans leur théorie abstraite, qui se développe actuellement, puis dans la réalisation de ces machines, dans les projets desquelles sa place est fondamentale.

La logique mathématique intervient aussi dans une science en voie de développement, la linguistique quantitative, qui constitue en quelque sorte la mathématisation de la grammaire et de la syntaxe, et qui est appelée à jouer un rôle important dans la plupart des branches du traitement de l'information.

On rencontre également la logique mathématique dans une vaste discipline, celle des « langages symboliques », langages débarrassés des incertitudes et des variations de sens du langage courant. Elle comprend comme cas très particuliers le langage de l'algèbre, et aussi les divers langages qu'utilise la logique mathématique elle-même. Plusieurs langages symboliques ont été créés pour « converser » avec les machines, pour écrire aussi aisément que possible le programme que la machine doit exécuter. C'est alors la machine elle-même qui sera chargée de traduire le langage symbolique en le « langage machine » très spécial qu'elle peut utiliser directement d'après sa construction. Cette traduction nécessitera un programme spécial qui est appelé un *compilateur*. Il y aura intérêt à constituer le langage symbolique de départ de façon à réaliser ce compilateur aussi simplement que possible. L'étude de ces questions ne fait que commencer, quoiqu'elle ait déjà donné lieu à un grand nombre de travaux. Pour en donner une idée, citons le nombre de plus de deux cent soixante participants, dont quatre-vingts Français environ, au symposium organisé à Rome en mars 1962 sur le sujet des langages symboliques par le « Centre international de Calcul ».

Enfin, la « démonstration automatique », à laquelle on songeait depuis longtemps, sous le nom de « problème de la décision » est en voie de devenir une réalité, grâce à l'association de la puissance des machines et des travaux déjà anciens du mathématicien français Jacques Herbrand, mort en montagne en 1931; il semble bien que celui-ci ait songé à une utilisation automatique en élaborant son remarquable système logique. Un catalogue des « thèses », ou identités logiques, va pouvoir être obtenu, en commençant par les thèses les plus simples. Il sera alors possible de poser à la machine le problème de l'exactitude d'une proposition dans un système d'axiomes donné, et d'en obtenir dans des cas assez simples une réponse affirmative ou négative.

Abandonnons la liste des sujets d'actualité se rattachant à la logique mathématique pour parler de sa place au Colloque. C'est la logique mathématique pure, et non son application, qui s'est trouvée à l'honneur. Deux exposés avaient pour objet la théorie de la définition : l'un, de caractère classique, par le professeur Beth, d'Amsterdam, l'autre, très original, par Marc Krasner, professeur à Clermont-Ferrand. L'école intuitionniste d'Amsterdam, fondée autrefois par L. E. J. Brouwa, était représentée par le professeur Heyting, dont l'exposé avait pour titre « Critique de Pascal à la méthode axiomatique », et tendait à montrer que l'axiomatique de la théorie des ensembles n'a aucune valeur du point de vue de la doctrine intuitionniste. Le professeur Rabin, de Jérusalem, fit un exposé de logique classique sur les « ensembles d'énoncés ». Enfin, les conférences des professeurs Markov, de Moscou, et Mostowski, de Varsovie, eurent trait aux relations mutuelles entre logique et topologie, d'ailleurs dans deux directions opposées, l'une s'appliquant à l'autre, et celle-ci s'appliquant à la première.

En même temps que la section de logique, celle de *calcul des probabilités* s'ouvrait le premier jour. Introduit par Blaise Pascal, et après un développement assez lent, le calcul des probabilités prend sa place maintenant dans des domaines toujours plus nombreux, allant de la statistique à la physique et à la recherche opérationnelle, ou science de la pratique de la décision. Les machines électroniques, et même parfois les grands ensembles à traiter l'information, sont indispensables pour ces diverses applications.

Dans cette section du Colloque, les exposés des professeurs Renyi, de Budapest, Cramer, de Stockholm, et Linnik, de Leningrad, étaient consacrés à des études sur des variables aléatoires ou sur des familles de lois de probabilité vérifiant certaines conditions; l'exposé du professeur Rao, de Calcutta, portait sur la théorie de l'estimation, tandis que celui du professeur Ito, de Kyoto, était une contribution aux équations différentielles stochastiques.

Mon collègue Fortet donnait des définitions précises en « programmation dynamique », ou étude des décisions à prendre dans les systèmes économiques en cours d'évolution.

L'une des sections du Colloque était intitulée : « Géométrie et physique mathématique ».

Pourquoi ce titre double? Peut-être est-il permis de répondre ainsi : sur le modèle de la théorie de la relativité, qui a établi un lien profond entre d'une part la géométrie, au sens général qui a été donné à ce mot par Riemann dans sa célèbre dissertation inaugurale « Sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie », et d'autre part les phénomènes physiques qui ont lieu dans l'espace géométrique, à commencer par la gravitation, a été entrepris tout un ensemble de recherches qui, tirant leur origine des principes de la mécanique élaborés de Newton à Mach, ont eu un but unique, qui peut, en un certain sens, s'énoncer ainsi : considérer les phénomènes physiques comme des propriétés géométriques de l'espace.

Alors que la gravitation est entrée aisément dans ce cadre avec la relativité générale d'Einstein qui s'appuyait sur les expériences réalisées au début du siècle par Eötvös, lesquelles prouvaient la proportionnalité de la masse pesante et de la masse d'inertie avec toute l'exactitude de l'expérience, il n'en a pas été de même pour les autres phénomènes, électromagnétiques, quantiques, et plus tard nucléaires. Par exemple, dans les mémoires initiaux d'Einstein sur la relativité générale, le champ électromagnétique était surajouté à l'espace-temps unissant géométrie et gravitation, d'une manière analogue à celle qu'emploie la mécanique classique pour surajouter gravitation, ou, plus généralement, force quelconque, à l'espace géométrique.

Deux des exposés du Colloque étaient relatifs à la géométrie des spineurs; c'est là une notion introduite par les mathématiciens, étudiée il y a déjà longtemps par Élie Cartan, et dont l'importance physique ne cesse de s'accroître depuis. Les deux sujets touchant à cette théorie furent traités l'un par mon camarade André Lichnerowicz du Collège de France, l'autre par le professeur Géhéniau de Bruxelles.

L'exposé de G. Cattaneo, professeur à Rome, envisageait un problème particulier du champ de gravitation relativiste, alors que celui de Walker, professeur à Liverpool, examinait la nature géométrique des modèles cosmologiques en général; de tels modèles ont, en effet, été proposés en grand nombre depuis l'avènement de la relativité.

Quant à l'exposé de P. Jordan, professeur à Hambourg, prolongeant des travaux de von Neumann et de G. Birkhoff, il étudiait quelle pourrait être la structure algébrique des systèmes qu'il faudrait introduire pour pouvoir formuler simultanément le plus grand nombre possible de problèmes physiques. P. Jordan envisageait dans ce but des *treillis gauches* dans un espace vectoriel.

Nous arrivons à la section d'*Analyse numérique*, pour laquelle le Comité d'organisation m'avait fait l'honneur de me demander de proposer des conférenciers. On entend par analyse numérique la partie de l'analyse mathématique qui est susceptible d'être utilisée dans le calcul numérique, et qui a été spécialement étudiée et développée dans ce but. On peut considérer que, dans leurs débuts, les mathématiques ont été créées en vue du calcul numérique. Dans leurs développements successifs, elles s'en sont souvent de plus en plus écartées; de ce fait, la raison principale était que les théories mathématiques, si l'on avait voulu les appliquer au calcul numérique, auraient donné lieu à une exécution irréalisable avec les moyens dont on disposait, c'est-à-dire la main. Avec les machines électroniques, la situation s'est renversée; chaque jour, de nouvelles branches de l'analyse mathématique accèdent au calcul numérique. Les développements auxquels elles avaient donné lieu jusque-là sont repris, étoffés en vue de leur utilisation nouvelle, si bien que la théorie initiale n'en apparaît plus que comme le squelette.

Pour illustrer ces faits, citons les diverses démonstrations des théorèmes d'existence des équations différentielles et aux dérivées partielles, y compris les méthodes de minimum, qui sont presque toutes devenues aujourd'hui des méthodes de résolution numérique.

Dans un tout autre domaine, des théories anciennes, telles que l'approximation de Tchebycheff, sortent de l'oubli et passent au premier rang de l'actualité. Il en est de même des fractions continues, qui constituent une puissante méthode de calcul sur laquelle nous reviendrons dans un instant.

Les notions qui paraissaient le plus éloignées des applications jouent également leurs rôles en analyse numérique. Par exemple, il serait aussi absurde aujourd'hui pour le mathématicien qui prépare des problèmes en vue de les confier à une machine, de vouloir éviter la notion d'intégrale de Lebesgue, qu'il l'aurait été autrefois de vouloir éviter la notion de nombre irrationnel, en s'astreignant à le remplacer partout, au cours du raisonnement, par une valeur approchée rationnelle. Les deux choses sont du même ordre.

La topologie joue aussi un rôle essentiel dans l'étude des différentes sortes d'approximation d'une fonction, sorte à choisir selon les besoins du calcul. Dans chacun des cas, c'est une topologie bien déterminée qu'il conviendra d'utiliser dans l'espace fonctionnel.

En dehors des développements qui se rattachent à l'analyse classique, le calcul numérique est sur le point de donner naissance à des théories nouvelles. C'est tout un aspect de l'analyse mathématique, ignoré jusqu'ici, qui est certainement appelé à se développer, et sur lequel nous ne savons encore à peu près rien. Citons un exemple simple : la notion de « racines égales » d'une équation algébrique, qui doit être remplacée par une notion nouvelle : celle de racines indiscernables quand les coefficients de l'équation varient dans des domaines fixés.

La section d'analyse numérique débuta par un intéressant exposé de M. Cayrel, de l'Institut d'Astrophysique de Paris, réhabilitant la vieille théorie des fractions continues comme un puissant moyen de calcul numérique, d'autant plus intéressant qu'on dispose d'une plus grande machine.

M. Blanc, professeur à Lausanne, naguère théoricien de la représentation conforme et aujourd'hui spécialiste en analyse numérique, fit un exposé d'ordre général sur les erreurs d'arrondi, et sur l'application qui peut leur être faite du calcul des probabilités. M. Kuntzmann, professeur à Grenoble, fit une utile comparaison entre les méthodes usuelles employées pour la résolution numérique des équations différentielles.

Deux de mes collègues du Centre international de Calcul, M. Ghizzetti, professeur à Rome, et M. Walther, à Darmstadt, donnèrent d'intéressants exposés. M. Ghizzetti dévoila ses étonnantes et brillantes qualités pédagogiques, ainsi que sa maîtrise de la langue française, en établissant des égalités fondamentales et nouvelles d'où peuvent être aisément tirées toutes les formules de quadrature habituelles, parvenant ainsi à une expression explicite simple du reste qu'elles comportent. M. Walther présenta et commenta un modèle remarquablement bien exécuté de la machine à calculer pré-pascalienne de Wilhelm Schickard, qui fut utilisée, semble-t-il, par Kepler.

M. Lancros, professeur à Dublin, auteur d'ouvrages aujourd'hui classiques sur le calcul numérique en général et sur le calcul matriciel en particulier, exposa une méthode de quadrature nouvelle présentant dans plusieurs cas des avantages certains.

La dernière journée fut consacrée aux constructeurs de machines, dont les envoyés firent plusieurs exposés sur certaines réalisations et sur leur utilisation rationnelle.

L'exposition de machines à calculer comportait une section de réalisations anciennes et parmi elles deux machines de Pascal authentiques, dont l'une était en si bon état qu'elle paraissait neuve.

Dans une deuxième section, des constructeurs avaient exposé leurs machines électroniques, se limitant à celles qui sont appelées « petites », de la taille d'un meuble-bureau par exemple. Ce sont des instruments plus spectaculaires que les grands ensembles, étant donnée la facilité avec laquelle le non-initié peut résoudre sur elles, presque sans apprentissage, des problèmes relativement longs et difficiles à traiter à la maison, ou même avec une machine de bureau; tels sont le calcul de certaines fonctions élémentaires, comme les fonctions de Bessel par exemple, ou la résolution de systèmes différentiels d'ordre assez élevé à partir de conditions initiales, comme le célèbre problème des trois corps en mécanique céleste.

Pour ne pas être accusé d'oubli, je dois dire que le Comité m'avait chargé de la présentation du Colloque. C'était là un titre assez ambigu, et j'en ai profité pour tenter de décrire, avec quelques détails, les rapports qui pouvaient exister entre chacune des sections et les grands ensembles à traiter l'information.

Voici enfin un tableau d'ensemble indiquant très sommairement les sujets des différents exposés :

Logique mathématique :

Beth,	Amsterdam. . . .	Définition.
Krasner,	Clermont-Ferrand.	
Heyting,	Amsterdam. . . .	Intuitionnisme et théorie des ensembles.
Rabin,	Jérusalem	Ensembles d'énoncés.
Markov,	Moscou	Logique et topologie.
Mostowski,	Varsovie	

Calcul des probabilités :

Renyi,	Budapest.	Variables aléatoires et lois de probabilité.
Cramer,	Stockholm	
Linnik,	Leningrad	
Ito,	Kyoto	Équations différentielles stochastiques.
Fortet,	Paris.	Définitions précises relatives aux systèmes économiques en cours d'évolution.

Géométrie et physique mathématique :

Lichnerowicz,	Paris.	Géométrie des spineurs.
Géhéniau,	Bruxelles.	
Cattaneo,	Rome	Champ de gravitation.
Walker,	Liverpool. . . .	Modèles cosmologiques.
Jordan,	Hambourg	Systèmes algébriques permettant de formuler tous les problèmes physiques.

Analyse numérique :

Cayrel,	Paris.	Fractions continues.
C. Blanc,	Lausanne. . . .	Erreurs d'arrondi et probabilités.
Kuntzmann,	Grenoble. . . .	Valeur comparée des différentes méthodes utilisées pour résoudre les équations différentielles.
Ghizzetti,	Rome	Formule de quadrature avec reste explicite.
Walther,	Darmstadt . . .	Historique des machines à calculer.
Lancros,	Dublin.	Nouvelle formule de quadrature.

Exposés généraux :

De Possel,	Paris.	Présentation du Colloque.
*M*me *Tonnelat,*	Paris.	Pascal et la recherche scientifique de tous les temps.